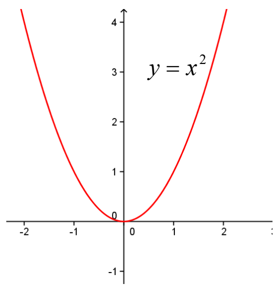
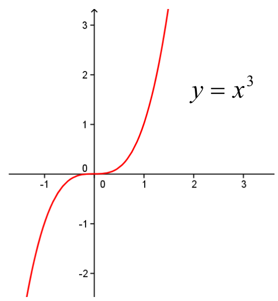
О егзистенцији корена

У досадашњем излагању обрађивали смо операцију степеновања природним и целим изложиоцем користећи особине степеновања. Затим, упознали смо се са степеном функцијом и њеним особинама; посебно смо се позабавили степеним функцијама $f(x)=x^2$ и $f(x)=x^3$.





У првом разреду упознали смо се са појмом инверзне функције. Да се потсетимо:
Дефиниција1. Нека су $f: A \to B$ и $f^{-1}: B \to A$ функције. Ако ове функције испуњавају услов $f^{-1}(f(x)) = x$ за све $x \in A$, тада кажемо да је f^{-1} инверзна(обрнута) функција функције f.

Пример 1. Нека је $f:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ c & b & a & d & e \end{pmatrix}$ и $f^{-1}:\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Ове функције испуњавају услов;

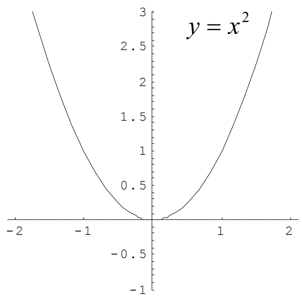
$f^{-1} \circ f:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, па су према томе, међусобно инверзне.

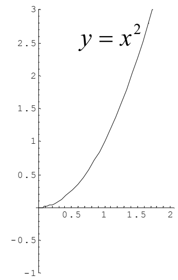
Пример 2. Нека је $f(x) = 1 + x$ и $f^{-1}(x) = x - 1$. Ове две функције су такође, међусобно инверзне, јер је $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(1+x) = 1 + x - 1 = x$ за све $x \in R$.

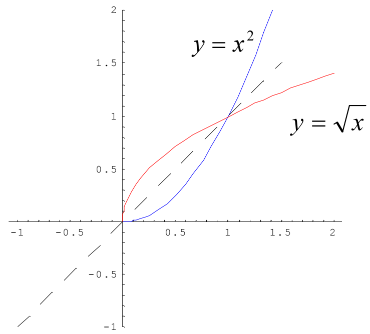
Пример 3. Нека је $y = f(x) = x^2$. Домен ове функције $D_f = R$, и кодомен $K_f = [0,+\infty)$ **(1)** јесу, заправо, скупови из дефиниције, редом, $A = D_f = R$ и $B = K_f = [0,+\infty)$, којима замењујемо места при формирању инверзне функције; $f^{-1}: B \to A$ јесте $f^{-1}:[0,+\infty) \to R$. Инверзну функцију требало би да добијемо из услова $f^{-1}(f(x)) = x$ за све $x \in A$, тј. $f^{-1}(x^2) = x$, $x \in R$. Из замене $y = x^2$, појављује се потреба да изразимо x преко y. То можемо, ако уведемо појам квадратног корена, па напишемо $x = \sqrt{y}$. Тада је, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, $y \geq 0$.

Дакле, коначан облик инверзне функције био би $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, али приметићемо да је њен кодомен R, па враћена вредност функцијом квадратног корена није једнозначна, него двозначна, што противуречи појму функције (то би значило, нпр. да $\sqrt{4}$ може да буде 2 и -2; јер $2^2 = 4$, и $(-2)^2 = 4$). Одавде долазимо до закључка да функција **(1)** нема инверзну функцију, али исто тако примећујемо да интервенцијом на тој функцији можемо да утичемо да постане *инвертибилна* тј. да има инверзну. У овој ситуацији, проблем ћемо решити умањењем (рестрикцијом) домена функције f. Сузићемо домен функције f са R на $[0,+\infty)$. Сада ће добијена релација $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, уз опис $f^{-1}:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ представљати инверзну функцију функције $f(x) = x^2$.

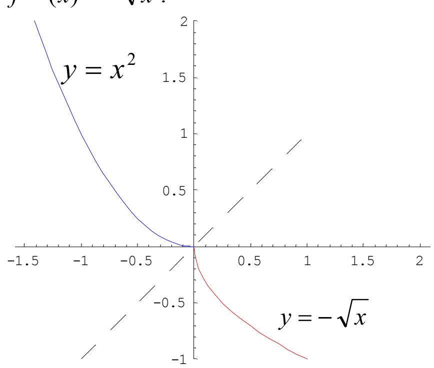
График функције $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, добићемо осном симетријом графика функције $f(x) = x^2$, $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$, у односу на осу симетрије, праву $y = x$.







Уз овакав опис закључујемо да је $\sqrt{4} = 2$, а није $\sqrt{4} = -2$.
Дакле, неправилно је рећи $\sqrt{4}$ јесте 2 или -2, или у облику $\sqrt{4} = \pm 2$. Правилно је $\pm\sqrt{4} = \pm 2$. Можемо "наслутити" где се крије кључ за оправдање ове правилности. Кључ је у уведеној рестрикцији домена функције **(1).**
Приметићемо да смо рестрикцију домена могли да дефинишемо тако да буде $f(x) = x^2$, $f : (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$. Тада би њена инверзна функција била $f^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.



Ова два примера степених функција подсећају нас да потребан и довољан услов да функција буде инвертибилна, јесте да она буде обострано – једнозначна ("1-1" и "NA").

А сад, одговоримо на питање, шта је, заправо, квадратни корен у инверзној функцији степене функције $f(x) = x^2$?
Ако једнакости $f^{-1}(f(x)) = x$ за све $x \in A$, тј. $f^{-1}(x^2) = x$, $x \geq 0$, приступимо на начин да уместо увођења појма корена, израз на левој страни једнакости представимо у облику степенованог израза непознатом r, биће; на основу једнозначности функције:

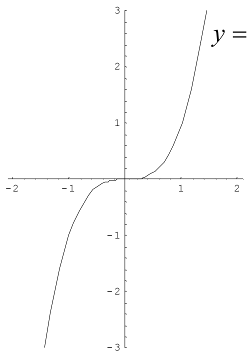
$f^{-1}(x^2) = (x^2)^r = x \Leftrightarrow x^{2r} = x^1 \overset{\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} 2r = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$. Дакле, квадратни корен је ознака изложиоца у степеном изразу, чија је вредност $\frac{1}{2}$.

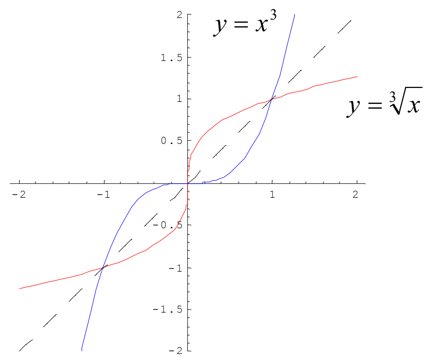
$f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = x, x \geq 0$.

Примедба: Једнакост $\sqrt{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = -x$ важи за $x < 0$, јер је $x^2 = (-x)^2 > 0$. То значи да је $\sqrt{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = |x|$. Такође, можемо приметити да је, у општем случају $f^{-1}(f(x)) \neq f(f^{-1}(x))$, тј. $\sqrt{x^2} \neq \left(\sqrt{x}\right)^2$, $x \in R$.

Пример 4. Нека је $y = f(x) = x^3$. Домен ове функције $D_f = R$, а кодомен $K_f = R$.
По дефиницији 1, инверзну f^{-1} формирамо тако што заменимо места домена и кодомена функције f. Значи, $f^{-1} : R \to R$, и покушамо да решимо функционалну једначину $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in R$; $f^{-1}(x^3) = x$. Из замене $y = x^3$, јавља се потреба да изразимо x преко y. То можемо ако уведемо појам кубног корена, па напишемо $x = \sqrt[3]{y}$. Тада је,

$f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$,. $y \in R$. Код ове степене функције, поступак је извршен без противуречности (инверзна релација f^{-1} је једнозначна, па је f^{-1} функција инверзна функцији f).
Служећи се осном симетријом у координатном систему и осом симетрије $y=x$, полазну функцију ћемо пресликати у инверзну.





Ако погледамо једнакост $f^{-1}(f(x))=x$ за све $x \in A$, тј. $f^{-1}(x^3)=x$, $x \in R$, онда израз на левој страни једнакости можемо представити у облику
$f^{-1}(x^3)=(x^3)^r=x \Leftrightarrow x^{3r}=x^1 \Leftrightarrow 3r=1 \Leftrightarrow r=\frac{1}{3}$. Дакле, кубни корен је ознака изложиоца у степеном изразу, чија је вредност $\frac{1}{3}$.

$f^{-1}(x^3)=\sqrt[3]{x^3}=\left(x^3\right)^{\frac{1}{3}}=x$, $x \in R$.
Ова два примера степених функција нас наводи на закључак да су инверзне функције степених функција са природним изложиоцем ,заправо, степене функције са разломљеним изложиоцем, (такозване корене функције), па уопштено, за степену функцију
Пример 5. $y=f(x)=x^n$, $n \in N$, инверзна функција је

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[n]{x} & ,n=2k, \quad x \geq 0 \\ \sqrt[n]{x} & ,n=2k+1, \ x \in R\end{cases} \ , \quad k \in N$$

Задаци:

(1) Скицирати график функције, и одредити њену инверзну функцију:

а) $f(x)=x^2$, $f:(-1,0]\cup[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ б) $f(x)=-\sqrt{-x}$, $x \leq 0$.

в) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & ,-1\leq x\leq 0\\ x^2 & ,0<x\leq 1\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,-1\leq x<0\\ -x^2 & ,0<x\leq 1\end{cases}$ д) $f(x)=x\cdot|x|$

(2) Која од следећих функција је инвертибилна?

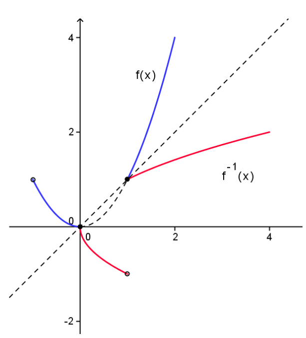
а) $f(x)=\sqrt{|x|}$ б) $f(x)=x\cdot\sqrt{|x|}$

(3) Скицирати графике функција, па ако су инвертибилне, одредити њихове инверзне функције:

а) $f(x)=-\sqrt[3]{x}$ б) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ в) $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x^2}$

решења:

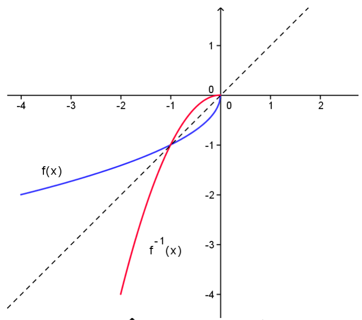
(1) а)



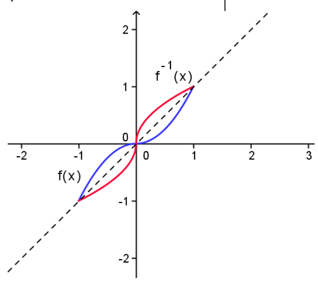
Плава линија јесте график дате функције $f(x)=x^2$, а црвена линија је график инверзне функције, која се добија осном симетријом графика дате функције. Оса симетрије јесте права $y=x$.
Имајући у виду претходно изложено, и добијени график, инверзна функција је:

$f^{-1}:[0,+\infty)\to(-1,0]\cup[1,+\infty)$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{x} & ,x\in[0,1)\\ \sqrt{x} & ,x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

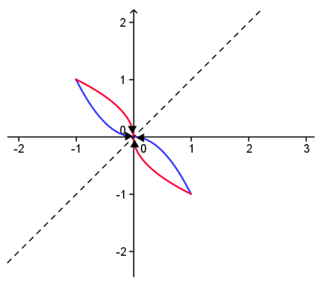
б) 

Исти поступак као у претходном решењу;
$f(x) = -\sqrt{-x}$, $x \le 0$, $f : (-\infty, 0] \to (-\infty, 0]$,
$f^{-1} : (-\infty, 0] \to (-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = -x^2$, $x \le 0$.

в) 

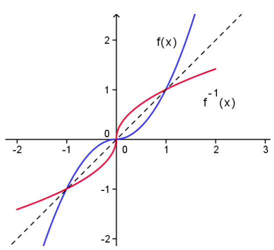
Плава линија јесте график дате функције f, а црвена линија је график инверзне функције;
$f : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $f^{-1} : [-1, 1] \to [-1, 1]$, и

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & , x \in [-1, 0) \\ \sqrt{x} & , x \in [0, 1] \end{cases}$$

г) 

Морамо приметити да је по дефиницији функције f, искључена тачка координатног почетка. Према томе, биће $f : [-1, 0) \cup (0, 1] \to [-1, 0) \cup (0, 1]$,
$f^{-1} : [-1, 0) \cup (0, 1] \to [-1, 0) \cup (0, 1]$, тј.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & , x \in [-1, 0) \\ -\sqrt{x} & , x \in (0, 1] \end{cases}$$

д) 

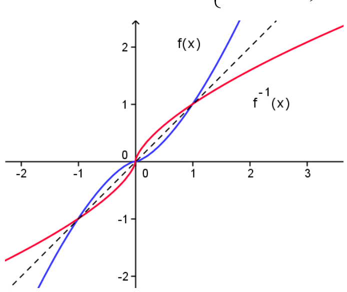
$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & , x \ge 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}, \quad f : R \to R,\ f^{-1} : R \to R,$$

$$f^{-1}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{x} & , x \ge 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{array} \right\} = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}.$$

(2) а) није инвертибилна, јер је парна; $f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f(x)$, па није "$1-1$".

б) јесте инвертибилна; $f(-x) = -x \cdot \sqrt{|-x|} = -x \cdot \sqrt{|x|} = -f(x)$. Ова функција је непарна (али , то не значи да је бијективна – скицирајте пример такве функције). Функција је бијективна. $f : R \to R$, $f^{-1} : R \to R$

$$f(x) = x \cdot \sqrt{|x|} = \left\{ \begin{array}{ll} x\sqrt{x} & , x \ge 0 \\ x\sqrt{-x} & , x < 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{x^3} & , x \ge 0 \\ \sqrt{-x^3} & , x < 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} x^{\frac{3}{2}} & , x \ge 0 \\ (-x)^{\frac{3}{2}} & , x < 0 \end{array} \right\}, \text{ па је}$$



$$f^{-1}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^{\frac{2}{3}} & , x \ge 0 \\ -x^{\frac{2}{3}} & , x < 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt[3]{x^2} & , x \ge 0 \\ -\sqrt[3]{x^2} & , x < 0 \end{array} \right\} = \operatorname{sgn}(x)\sqrt[3]{x^2}$$

(3) самостално решити.

проф. Илија Јоксимовић